Cours AO102 **Mardi 6 novembre 2012**

Examen écrit : durée 3 heures.

Aucun document n'est autorisé, *hormis une feuille "aide-mémoire" manuscrite.*
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le sujet se compose de quatre exercices qui peuvent être traités séparément.

Exercice 1.

Les équations de Hill linéarisées pour le mouvement de deux satellites autour de leur orbite circulaire sont données par

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} = 0, \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = 0, \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

où $\omega > 0$ est une constante reliée au rayon de l'orbite de référence.

1. Écrire ces équations sous la forme d'une équation différentielle linéaire $X' = AX$ dans $\mathbb{R}^4$ et déterminer les valeurs propres de la matrice A.

2. Donner la forme générale des solutions (en explicitant la dépendance par rapport au temps).

3. Montrer qu'il existe un hyperplan H (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 3) qui contient toutes les orbites périodiques.

4. Quel est le comportement asymptotique (quand $t \to +\infty$) d'une solution dont la condition initiale n'est pas dans H ?

Exercice 2.

On considère un modèle de deux populations en compétition :

$$\begin{cases} x_1' &= (2 - x_1 - 4x_2)x_1, \\ x_2' &= (1 - x_1 - x_2)x_2, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

On note ϕ_t le flot de cette équation différentielle.

1. Déterminer les équilibres de (1) dans $\mathbb{R}^2$.

2. Pour chaque équilibre :
- étudier la stabilité,
- indiquer le nombre d'orbites stables (rappel : *une orbite $\mathcal{O}$ est stable en un équilibre $\bar{x}$ si, pour tout $x \in \mathcal{O}$, on a $\phi_t(x) \to \bar{x}$ quand $t \to +\infty$*),
- donner sur un dessin l'allure du portrait de phase du linéarisé et expliquer le dessin (existence d'asymptotes quand $t \to \pm\infty$ en particulier).

3. Montrer que, $\forall b > 2$, la région $Q_b = [0, b]^2$ est positivement invariante : si $x \in Q_b$, alors $\phi_t(x) \in Q_b$ pour tout $t \geq 0$ tel que $\phi_t(x)$ existe. Qu'en déduit-on sur la durée de vie des solutions dans le quadrant $[0, +\infty[^2$?

4. Montrer que si $x \in B$ ou D, alors $\phi_t(v)$ converge vers un équilibre asymptotiquement stable quand $t \to +\infty$ (les régions B et D sont définies sur la figure au tableau).

5. Étude locale en x^* (voir la figure au tableau).

(a) Montrer que si $\mathcal{O}$ est une orbite stable en x^*, alors $\mathcal{O} \cap B$ et $\mathcal{O} \cap D$ sont vides.

On admettra qu'il existe en x^* un orbite stable $\mathcal{O}^A$ contenue dans A et une orbite stable $\mathcal{O}^C$ contenue dans C.

(b) Montrer que si $v \in \mathcal{O}^A$, alors $\phi_t(v)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\phi_t(v) \to 0$ quand $t \to -\infty$.

(c) Montrer que si $v \in \mathcal{O}^C$, alors $\|\phi_t(v)\| \to +\infty$ quand $t \to t_-$, où $]t_-, t_+[$ est l'intervalle de définition de la solution $t \mapsto \phi_t(v)$.

6. Montrer que si $v \notin \mathcal{O}^A \cup \mathcal{O}^C$, alors $\phi_t(v)$ converge vers un équilibre asymptotiquement stable quand $t \to +\infty$.

7. Donner sur un dessin l'allure du portrait de phase de l'équation dans $[0, +\infty[^2$. Indiquer les bassins d'attraction des équilibres asymptotiquement stables.

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle suivante dans $\mathbb{R}^{2n}$,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -B(x)y - f(x), \end{cases} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad \text{avec}$$

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs C^1 ;
- pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, $B(x) \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive et $x \mapsto B(x)$ est C^1.

[<u>Rappel :</u> *si B symétrique définie positive, alors $x^T Bx > 0$ pour tout vecteur $x \neq 0$.*]

1. Calculer, en fonction de la différentielle $Df(x)$ de f, la différentielle de l'application

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^T y + \frac{1}{2} x^T f(x).$$

On suppose maintenant que $f(x) = Ax$, où A est une matrice symétrique définie positive.

2. Montrer que V est une fonction de Lyapunov en 0. Qu'en déduit-on pour l'équilibre 0 ?

3. Montrer que 0 est en fait un équilibre globalement asymptotiquement stable.

Exercice 4.

On considère l'équation différentielle linéaire dans $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = A(t)x(t), \qquad t \in]-\infty, 1[, \tag{2}$$

où $A(\cdot)$ est continue, et on note $R(t, t_0)$ sa résolvante.
On suppose que, pour toute solution $x(\cdot)$ de (2), $x(t)$ a une limite finie quand $t \to 1$.

Montrer qu'il existe une solution non nulle $x(\cdot)$ telle que $\lim_{t \to 1} x(t) = 0$ si et seulement si

$$\int_0^1 \operatorname{tr}(A(t))dt = -\infty.$$

[<u>Indication :</u> pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\ker M \neq \{0\}$ si et seulement si $\det M = 0$.]

PLIER ET COLLER

Aux candidats

Ecrivez très lisiblement :

vos nom, prénom et votre numéro d'inscription

Nom : MKIREB

Prénom : Chouaïb

Date de naissance : 11/10/1992

N°

Rabattre ici le coin gommé

Matière : AO 102

Date : 1/11/2012

Nombre d'intercalaires : 3

NOTE /20

ANNOTATIONS :

Exercice 1

1. ~~$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, X'~~

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$, on a

$\dot{X} = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 2\omega & 3\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$

On calcule le Polynome caractéristique de A :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & X & -1 \\ 0 & -2\omega & -3\omega^2 & X \end{vmatrix} \cancel{= X(X-1) \cdot 4\omega^2} = X^2(X^2 + 4\omega^2)$$

~~$= X\left[X^2(X-1) + 4\omega^2(X-1)\right]$~~

~~$= X(X-1)(X^2+4\omega^2)$~~

~~$Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0, 1, 2i\omega, -2i\omega\}$~~

$Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0, 2i\omega, -2i\omega\}$

en fait

$\chi_A = x^2(x^2+\omega^2)$

$sp(A) = \{0, \pm i\omega\}$

PLIER ET COLLER

2. $X' = AX$ et A est une matrice constante donc :

$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad X(t) = e^{tA} X(0)$ avec $X(0)$ la Condition initiale, e^{tA} est bien une matrice.

3. orbite periodique $\Leftrightarrow (\exists T \in \mathbb{R}) \; x(t+T) = x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

donc $e^{tA} X(0) = e^{tA+TA} X(0)$

on a $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(e_1) \quad e_1 = (1, 0, 0, 0)$

vrai mais

$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} A^2 \oplus \underbrace{\operatorname{Ker}(A - 2i\omega \, Id) \oplus \operatorname{Ker}(A + 2i\omega \, Id)}_{H}$

$\operatorname{Ker} A^2 = 2 \dim$

$\left.\begin{matrix} E_{i\omega} \\ E_{i\omega} \end{matrix}\right\} 2 \dim$

~~Si on part~~ Notons que ~~$\dim \operatorname{Ker} A^2 = 1$~~ par un calcul

$\dim \operatorname{Ker} A^2 = 2$

donc $\dim H = 4 - 1 = 3$

H est un hyperplan qui contient toutes les orbites periodiques.

4- Si on part d'un point qui n'est pas dans H ~~L'orbit~~ La solution n'est plus périodique :

$$X(t) = e^{tA} X(0) = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & e^{2i\omega t} & \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2i\omega t} \end{pmatrix} P \; x(0)$$

Les solutions oscillent donc autour d'une droite qui est le supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$ $(\mathbb{R}^4 = H \oplus \operatorname{vect}(a))$

Exercice 2

$$\begin{cases} x_1' = (2 - x_1 - 4x_2)\, x_1 \\ x_2' = (1 - x_1 - x_2)\, x_2 \end{cases}$$

1) soit $f(x_1, x_2) = \left((2 - x_1 - 4x_2)x_1, (1 - x_1 - x_2)x_2\right)$

$$f(x_1, x_2) = 0 \iff \begin{cases} x_1(2 - x_1 - 4x_2) = 0 \\ x_2(1 - x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

$\iff$ $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$

ou $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$

ou $x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{1}{3}$

ou $x_1 = 2$ $x_2 = 0$

Équilibres $= \left\{ (0,0), (0,1), (2,0), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$

2) Pour $(0,0)$, $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Sp} Df(0,0) = \{2, 1\}$ de parties réelles > 0

$\implies (0,0)$ est un équilibre non stable.

Pour $(0,1)$ $Df(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{tr} Df(0,1) = -3 < 0$ $\det Df(0,1) = 2 > 0$

donc $(0,1)$ est un équilibre assymptotiquement stable.

Pour $(2,0)$ $\quad Df(2,0) = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} tr\, Df(2,0) = -3 < 0 \\ \det Df(2,0) = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (2,0)$ équilibre assymptotiquement stable.

Pour $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\quad Df\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\text{Det } Df\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{6}{9} < 0$

$tr\, Df\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -1 < 0$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est un équilibre non stable

•) pour $(0,1)$ et $(2,0)$ qui sont assymptotiquement stables, il existe une infinités d'orbites stables passant par ces points. toutes

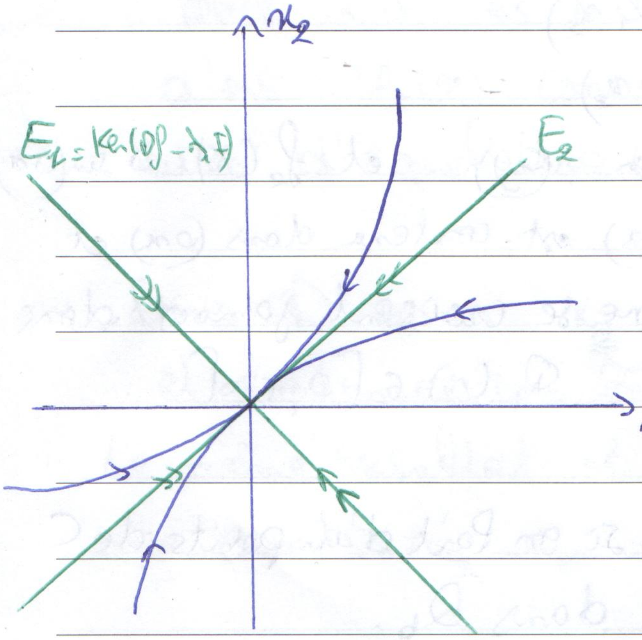
•) pour $(0,0)$, ~~on et~~ $\cancel{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}$, la matrice Df admet 2 valeurs propres de parties réelles > 0 donc il n'y a aucune orbite stable passante par 0. (sauf 0)

•) pour $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, Df admet une valeur propre $\lambda_1 < 0$ et l'autre $\lambda_2 > 0$ donc il n'y a qu'une orbite stable passante par $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ qui est $Ker\left(Df\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - \lambda_1 I_2\right)$

linearisé ! qu'est-ce qu'on peut dire pour non lin ?

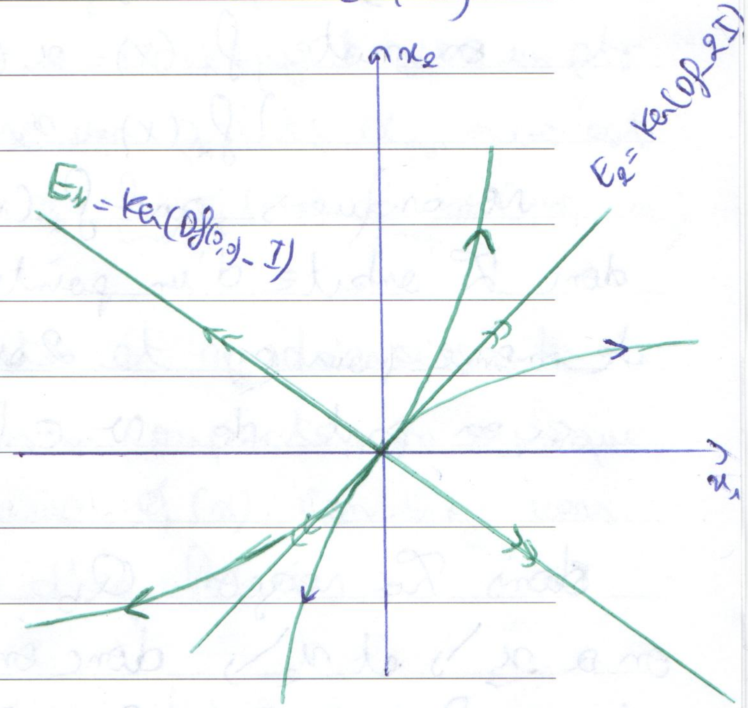
intercalaire 1

Pour $(0,0)$



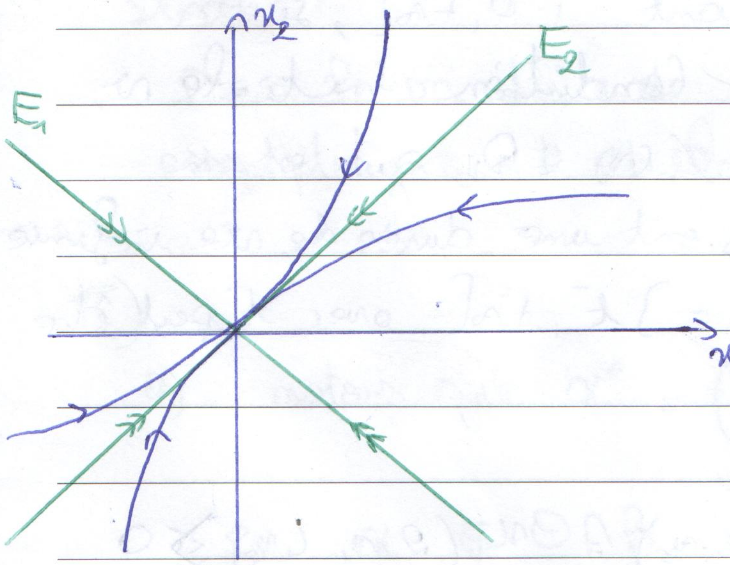
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Pour $(2,0)$



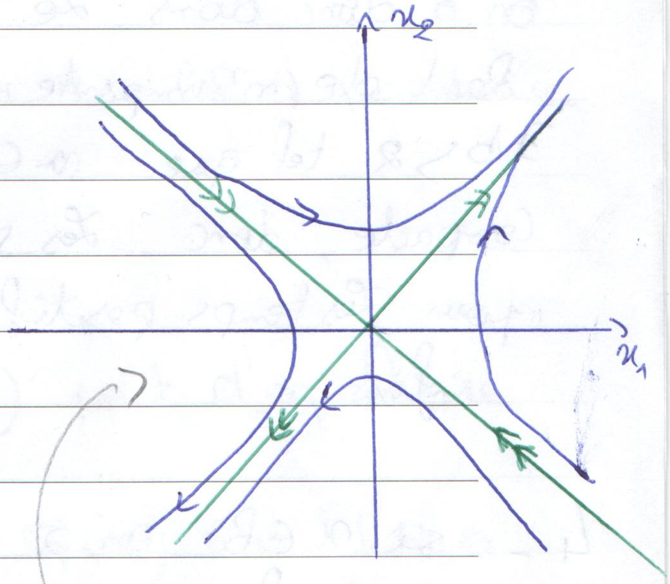
$0 < \lambda_1 = 1 < \lambda_2 = 2$

Pour $(0,1)$



$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Pour $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

qui E_1 et E_2 ?

3 - soit $b > 2$, $Q_b = [0, b]^2$

on note $\begin{cases} f_1(X) = x_1(2 - x_1 - 4x_2) \\ f_2(X) = x_2(1 - x_1 - x_2) \end{cases}$

remarquons que $f_1(X) = 0$ sur (Oy) et $f_2(X) = 0$ sur (Ox)

donc l'orbite d'un points de (Ox) est contenu dans (Ox) et de même pour (Oy). 2 orbites ne se croisent jamais donc si on part de $v \in [0, +\infty[^2$ $\phi_t(v) \in [0, +\infty[$

~~dans~~ La région Q_b on a : si on part d'un points de C on a $x_1 \searrow$ et $x_2 \searrow$ donc on reste dans Q_b.

et si on part de A ou B ou D à partir d'un temps on tombe dans C (x^* ou $(2,0)$ ou $(0,1)$) ou bien on reste dans la même région. donc on reste toujours dans Q_b. d'où Q_b est invariante.

on a donc dans le quadrant $[0, +\infty[$, si on part de n'importe quelle condition initiale v, $\exists b > 2$ tel que $v \in Q_b$, $\phi_t(v) \in Q_b$ qui est un compacte, donc les solutions ont une durée de vie infinie pour les temps positifs, $I =]t^-, +\infty[$ avec t^- peut être infini.

4 - si $x \in B$ on a : $f_1(x_1, x_2) = x_1(2 - x_1 - 4x_2) \geq 0$

et $f_2(x_1, x_2) = x_2(1 - x_1 - x_2) \leq 0$

donc $x_2' \leq 0$ $x_1' \geq 0$

x_1 croissante et x_2 décroissante dans B

or $\phi_t(x)$ est toujours dans un compacte de type $[0, b]^2$, et chaque fonction croissante majorée a une limite en $+\infty$ (respectivement décroissante minorée) c'est le théorème de la convergence monotone.

donc $x_1(t)$ et $x_2(t)$ ~~ont~~ convergent vers un pts

d'où $\phi_t(x)$ converge vers un points x_∞ qui est

bien d'équilibre ($\phi_t(x_\infty) = \phi_t(\lim_{s \to +\infty} \phi_s(\tilde{x}(0)) = \lim_{s \to +\infty} \phi_{t+s}(\tilde{x}(0)) = x_\infty$)

Dans D on a x_2 croissante et x_1 décroissante et contenues tous les 2 dans un compacte, on applique le même résultat et on trouve $\phi_t(x)$ converge vers un points x'_∞ qui est bien d'équilibre.

~~OR, ce points x_∞ n'est autre que l'inters~~

OR d'après le graphe du Tableau dans la région D on monte ↖ donc $x'_\infty = (0, 1)$ qui est assymptotiquement stable.

Dans B on descends ↘ donc $x_\infty = (2, 0)$ qui est aussi assymptotiquement stable.

5)

a) notons que $x^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ point d'équilibre.

si $x_0 \in \Theta \cap B$, donc $\phi_t(x_0) \in B \quad \forall t \geq 0$

et $\phi_t(x_0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (2, 0)$

OR, Orbite (x_0) = Orbite (x^*) car $x_0 \in \Theta$

donc l'orbite de x^* converge vers un autre points d'équilibre $(2, 0)$, ce qui est Absurde : donc $\Theta \cap B = \emptyset$

de même, si $x_0 \in O \cap D$, $\phi_t(x_0) \in D$ $\forall t \geq 0$ et $\phi_t(x_0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (1,0)$ d'après ce qui précède. Or $\mathcal{O}$ orbite stable de x^* donc $\phi_t(x_0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x^*$, mais $x^* \neq (1,0)$

Contradiction : donc $O \cap D = \emptyset$

b) soit $v \in \mathcal{O}^A$, $\phi_t(v)$ est la solution maximale de l'équation tq $x(0) = v$, or v appartient à une orbite stable donc $\phi_t(v)$ défini ($\forall t \in \mathbb{R}$) car $\phi_t(v)$ contenu dans le compacte A
$\lim_{t \to -\infty} \phi_t(v)$ est bien un équilibre, et puisqu'on est dans la région A où x_1 et x_2 sont croissantes, pour les temps négatifs cet équilibre ne peut être que $(0,0)$ car après pour $t \geq 0$ on va s'approcher de x^*.
d'où $\phi_t(v) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$

c) On part maintenant d'un points v de $\mathcal{O}^C$: on a x_1 et x_2 décroissantes donc pour les $t \geq 0$ ϕ_t est ~~entre v et x^*~~ dans la portion de $\mathcal{O}^C$ entre v et x^*, pour les temps négatifs $\phi_t(v)$ dans la portion de la courbe $\mathcal{O}^C$ au dessus de v qui sort de tout compacte
donc $\|\phi_t(v)\| \xrightarrow[t \to t^-]{} +\infty$

6) si $v \notin \mathcal{O}^A \cup \mathcal{O}^C$ on a 2 possibilités :
→ si $v \in B$ ou D, c'est réglé par ce qui précède.
→ si $v \in A$ ~~ou C~~, $\phi_t(v)$ converge vers un équilibre, or cet équilibre ne peut pas être x^* car $v \notin \mathcal{O}^A$, donc cet equilibre est $\cancel{0}$ (assymptotiquement stable)
(0, 2) ou (1, 0) (0 impossible car $\phi_t \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$)
↳ il faut dire qu'on sort de A en temps fini
(sinon x_1, x_2 monotone ⇒ ∃ lim = eq ⇒ contrad)

Intercalaire 2

Si $v \in C$, $\phi_t(v)$ converge quand $t \to +\infty$

Vers un équilibre qui n'est pas x^* car $v \notin D^c$. cet équilibre ne peut être que $(1, 0)$ ~~qui est assymptotiquement st~~ ou $(0, 2)$ qui sont assympto stables.

Exercice 3

1- $V(x,y) = \frac{1}{2}\, {}^t y\, y + \frac{1}{2}\, {}^t x\, f(x)$

Soit $(h, K) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$V(x+h, y+K) = \frac{1}{2}\left({}^t y + {}^t K\right)(y+K) + \frac{1}{2}\left({}^t x + {}^t h\right) f(x+h)$$

$$= \frac{1}{2}\left[{}^t y y + {}^t K K + {}^t y K + {}^t K y\right] + \frac{1}{2}\left({}^t x + {}^t h\right).\left(f(x) + Df(x).h + o(\|h\|)\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\, {}^t y y + \frac{1}{2}\, {}^t x f(x)\right] + \frac{1}{2}\left[{}^t y K + {}^t K y + {}^t h . f(x) + {}^t x\, Df(x).h\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left[{}^t K.K + {}^t h . Df(x).h + {}^t h . o(\|h\|) + {}^t x . o(\|h\|)\right]}_{o(\|(h,K)\|_\infty)}$$

(Norme sup)

$$V(x+h, y+k) = V(x,y) + DV(x,y).(h,k) + o(\|(h,k)\|)$$

avec ici : $\boxed{DV(x,y).(h,k) = \frac{1}{2}\left[{}^t y k + {}^t k y + {}^t h . f(x) + {}^t x . Df(x).h \right]}$

2- si $f(x) = Ax$, on a f linéaire en x donc
$Df(x).h = f(h) = A.h$

on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\left({}^t y y + {}^t x . A x \right)$$

·) A symetrique définie $> 0 \Rightarrow {}^t x A x > 0 \quad \forall x \neq 0$
·) ${}^t y y = \|y\|^2 > 0 \quad \forall y \neq 0$

1) ~~donc~~ $V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$ ✓
2) $V(0,0) = 0$

3) $\cancel{\langle DV(x,y).(h,k) \rangle}$ si $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a :

$$\cancel{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A & -B(x) \end{pmatrix} X}$$

$$\cancel{\text{ici} \quad f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A & -B(x) \end{pmatrix}}$$

$\dot{x} = f(x)$ où $f(\underbrace{x_1, x_2}_{\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}) = (y, -B(x)y - Ax)$

$$\langle \nabla V(x,y), f(x,y) \rangle = DV(x,y) \cdot (f_1(x), f_2(x))$$

$$= \frac{1}{2}\Big[{}^t y [-B(x)y - Ax] + [-{}^t x \, {}^t A - {}^t y \, {}^t B(x)] y + {}^t y . Ax + {}^t x A . y \Big]$$

A et B symetriquement donc :

3) $\langle \nabla V(x,y), f(x,y) \rangle = \frac{1}{2}\left[-{}^t y B(x) y - {}^t y B(x) y \right]$

$$= -{}^t y B(x) y = -\|y\|_B < 0 \quad \forall y \neq 0$$

~~or~~ Les 3 conditions étant satisfaites, on a V est une fonction de Lyapunov en 0

donc 0 est un équilibre stable pour l'équa diff

(on va montrer apres qu'il est même assymptotiquement stable)

3 - on a

- $V(0,0) = 0$
- $V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$
- $\langle \nabla V(x,y), f(x,y) \rangle < 0 \quad \forall y \neq 0$

donc V est de liapponouv stricte en 0

or : $V(x,y) = \frac{1}{2}\left(\|y\|^2 + \|x\|_A^2\right)$ avec :

$\|y\| = \sqrt{{}^t y . y}$ et $\|x\|_A = \sqrt{{}^t x A x}$

(*) $\langle \nabla V(x,y), f(x,y) \rangle \equiv 0$ si $y = 0$. Il faut montrer que $\langle \text{---}, \text{--} \rangle < 0$ presque partout le long une sol !

qui sont Bien 2 Normes (car A symetrique, c'est une propriété étudiée en prépas)

$$V(x,y) \xrightarrow[\substack{\|x\| \to +\infty \\ \|y\| \to +\infty}]{} +\infty$$

d'où 0 est un équilibre Globalement assymptotiquement stable. (Le Bassin d'attraction de 0 est $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$)

Exercice 4

$$x'(t) = A(t)\, x(t)$$

supposons qu'il existe une solution $x(t)$ non nulle tel que $x(t) \xrightarrow[t \to 1]{} 0$

~~Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $x(0) = v \neq 0$~~

On a $x(t) = R(t,0)\, x(0)$

•) $x(0) \neq 0$ car sinon Par Cauchy Lipschitz $\underline{x \equiv 0}$

$$\lim_{t \to 1} R(t,0)\, x(0) = 0$$

~~Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, \alpha > 0$ tel que $\forall t \in \underbrace{]1-\alpha, 1+\alpha[}_{I_\alpha}$~~
~~$R(t,0)\, x(0)$~~

intercalaire3

$\exists R(1,0)$?

on a $\lim_{t\to 1} R(t,0)\, x(0) = 0$

et $x(0) \neq 0$

donc $R(1,0)\, x(0) = 0$

Par continuité de $R(t,s)$ (si elle l'est en 1)

donc $x(0) \in \operatorname{Ker} R(1,0)$

$\operatorname{Ker} R(1,0) \neq \{0\} \Rightarrow \det R(1,0) = 0$

or, $\det R(1,0) = \exp\left(\int_0^1 tr(A(t))\,dt\right) = 0$

$\left(e^a = 0 \iff a = -\infty\right)$

donc $\int_0^1 tr(A(t))\,dt = -\infty$

•) reciproquement si $\int_0^1 tr(A(t))\,dt = -\infty$ on a :

$\exp\left(\int_0^1 tr(A(t))\,dt\right) = 0$

donc $\lim_{s\to 1} \det R(s,0) = \lim_{s\to 1} \exp \int_0^s tr(A(t)\,dt) = 0$

pas forcement vrai

$\operatorname{Ker} R(s,0) \neq \{0\}$ pour s proche de 1

c'est à dire $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall s \in]1-\alpha, 1[$
$\operatorname{Ker}(R(s,0)) \neq \{0\}$

Soit v un element de $\operatorname{Ker} R(s,0)$ pour s proche de 1 ($v \neq 0$). On a dans ce cas :

$\lim_{s \to 1} R(s,0)\, v = 0$ et $v \neq 0$

soit la solution $x(\cdot)$:

$$\begin{cases} x(t) = R(t,0)\, v \\ x(0) = v \end{cases}$$

on a $x(t) \xrightarrow[t \to 1]{} 0$ car

$x(t) = R(t,0)\, x(0) \xrightarrow[t \to 1]{} 0$

D'où l'équivalence.